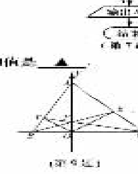
(上接 A26 版)

数学

6. 在平面直角坐标系 xOy 中,设 D 是横坐标与纵坐标的绝对值均不大于2的点构成的区域,E 是到原点的距离不大于1的点构成的区域,向 D 中随机投一点,则所投的点落在 E 中的概率是 ▲ .

7. 某地区为了解 70～80 岁老人的日平均睡眠时间(单位:h),随机选择了 50 位老人进行调查,下表是这 50 位老人日睡眠时间的频率分布表.

序号(i)	分组(睡眠时间)	组中值(G_i)	频数(人数)	频率(F_i)
1	[4,5)	4.5	6	0.12
2	[5,6)	5.5	10	0.20
3	[6,7)	6.5	20	0.40
4	[7,8)	7.5	10	0.20
5	[8,9]	8.5	4	0.08


(第7题)

在上述统计数据的分析中,一部分计算见算法流程图,则输出的 S 的值是 ▲ .

8. 设直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 是曲线 $y=\ln x\ (x>0)$ 的一条切线,则实数 b 的值为 ▲ .

9. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,设三角形 ABC 的顶点分别为 $A(0,a)$,$B(b,0)$,$C(c,0)$;点 $P(0,p)$ 为线段 AO 上的一点(异于端点),这里 a,b,c,p 为非零常数. 设直线 BP,CP 分别与边 AC,AB 交于点 E,F. 某同学已正确求得直线 OE 的方程:$(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})x+(\frac{1}{p}-\frac{1}{a})y=0$. 请你完成直线 OF 的方程:(▲)$x+(\frac{1}{p}-\frac{1}{a})y=0$.

(第9题)

10. 将全体正整数排成一个三角形数阵:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
… … … … … …

根据以上排列规律,数阵中第 $n\ (n\ge 3)$ 行的从左至右的第 3 个数是 ▲ .

11. 设 x,y,z 为正实数,满足 $x-2y+3z=0$,则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值是 ▲ .

12. 在平面直角坐标系 xOy 中,设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的焦距为 $2c$,以点 O 为圆心,a 为半径作圆 M. 若过点 $P(\frac{a^2}{c},0)$ 所作圆 M 的两条切线互相垂直,则该椭圆的离心率为 ▲ .

13. 满足条件 $AB=2$,$AC=\sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积的最大值是 ▲ .

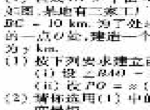
14. 设函数 $f(x)=ax^3-3x+1\ (x\in\mathbf{R})$,若对于任意 $x\in[-1,1]$,都有 $f(x)\ge 0$ 成立,则实数 a 的值为 ▲ .

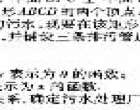
二、解答题:本大题共 6 小题,共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答,解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

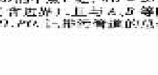
15. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,以 Ox 轴为始边作两个锐角 α,β,它们的终边分别与单位圆交于 A,B 两点. 已知 A,B 的横坐标分别为 $\frac{\sqrt{2}}{10}$,$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值; (2) 求 $\alpha+2\beta$ 的值.

17


(第15题)


(第16题)


(第17题)

16. 如图,在四面体 $ABCD$ 中,$CB=CD$,$AD\perp BD$,点 E,F 分别是 AB,BD 的中点. 求证:

(1) 直线 EF // 平面 ACD; (2) 平面 $EFC\perp$ 平面 BCD.

17. 如图,某地有三家工厂,分别位于矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A,B 及 CD 的中点 P 处. $AB=20$ km,$BC=10$ km. 为了处理三家工厂的污水,现要在该矩形区域上(含边界),且与 A,B 等距离的一点 O 处,建造一个污水处理厂,并铺设三条排污管道 AO,BO,PO. 记铺设管道的总长度为 y km.

(1) 按下列要求建立函数关系式:

(i) 设 $\angle BAO=\theta$ (rad),将 y 表示成 θ 的函数;

(ii) 设 $PO=x$ (km),将 y 表示成 x 的函数.

(2) 请你选用(1)中的一个函数关系,确定污水处理厂的位置,使铺设的排污管道的总长度最短.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中,设二次函数 $f(x)=x^2+2x+b\ (x\in\mathbf{R})$ 的图象与两个坐标轴有三个交点,经过这三点的圆记为 C.

(1) 求实数 b 的取值范围; (2) 求圆 C 的方程;

(3) 问圆 C 是否经过定点(其坐标与 b 无关)?请证明你的结论.

19. (1) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是各项均不为零的 $n\ (n\ge 4)$ 项等差数列,且公差 $d\ne 0$. 若将此数列删去某一项后得到的数列(按原来的顺序)是等比数列.

(i) 当 $n=4$ 时,求 $\frac{a_1}{d}$ 的数值; (ii) 求 n 的所有可能值.

(2) 求证:对于给定的正整数 $n\ (n\ge 4)$,存在一个各项及公差均不为零的等差数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,其中任意三项(按原来顺序)都不能组成等比数列.

20. 已知函数 $f_1(x)=3^{|x-p_1|}$,$f_2(x)=2\cdot 3^{|x-p_2|}$ ($x\in\mathbf{R}$,p_1,p_2 为常数). 函数 $f(x)$ 定义为:对每个给定的实数 x,$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & 若 f_1(x)\le f_2(x),\\ f_2(x), & 若 f_1(x)>f_2(x).\end{cases}$

(1) 求 $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充分必要条件(用 p_1,p_2 表示);

(2) 设 a,b 是两个实数,满足 $a<b$,且 $p_1,p_2\in(a,b)$. 若 $f(a)=f(b)$,求证:函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度之和为 $\frac{b-a}{2}$(闭区间 $[m,n]$ 的长度定义为 $n-m$).

数学试题参考答案

一、填空题:本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法. 每小题 5 分,共计 70 分.

1. 10　2. $\frac{1}{12}$　3. 1　4. 6　5. 7

6. $\frac{\pi}{16}$　7. 6.42　8. $\ln 2-1$　9. $\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$　10. $\frac{n(n-1)}{2}+3$

11. 3　12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　13. $2\sqrt{2}$　14. 4

二、解答题

15. 本小题主要考查三角函数的基本概念、三角函数的基本关系式以及两角和(差)的三角函数公式,考查运算求解能力. 满分 14 分.

18

解:(1) 由已知条件及三角函数的定义可知,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$,$\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因 α 为锐角,故 $\sin\alpha>0$,从而 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

同理可得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 因此 $\tan\alpha=7$,$\tan\beta=\frac{1}{2}$.

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{7+\frac{1}{2}}{1-7\times\frac{1}{2}}=-3$.

(2) $\tan(\alpha+2\beta)=\tan[(\alpha+\beta)+\beta]=\frac{-3+\frac{1}{2}}{1-(-3)\times\frac{1}{2}}=-1$.

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,故 $0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$,从而由 $\tan(\alpha+2\beta)=-1$ 得 $\alpha+2\beta=\frac{3\pi}{4}$.

16. 本小题主要考查直线与平面、平面与平面的位置关系,考查空间想象能力、推理论证能力. 满分 14 分.

证明:(1) 在 $\triangle ABD$ 中,因为 E,F 分别是 AB,BD 的中点,所以 EF // AD.

又 $AD\subset$ 平面 ACD,$EF\not\subset$ 平面 ACD,所以直线 EF // 平面 ACD.

(2) 在 $\triangle ABD$ 中,因为 $AD\perp BD$,EF // AD,所以 $EF\perp BD$.

在 $\triangle BCD$ 中,因为 $CD=CB$,F 为 BD 的中点,所以 $CF\perp BD$.

因为 $EF\subset$ 平面 EFC,$CF\subset$ 平面 EFC,EF 与 CF 交于点 F,所以 $BD\perp$ 平面 EFC.

又因为 $BD\subset$ 平面 BCD,所以平面 $EFC\perp$ 平面 BCD.

17. 本小题主要考查函数的概念、解三角形、导数等基础知识,考查数学建模能力、抽象概括能力和解决实际问题的能力. 满分 14 分.

解:(1) (i) 如图,延长 PO 交 AB 于点 Q.

由题设可知 $BQ=AQ=\frac{1}{2}AB=10$,

$AO=BO$,$PO=10-OQ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AQO$ 中,$AO=\frac{10}{\cos\theta}$,$OQ=10\tan\theta$,所以

$$y=AO+BO+PO=\frac{20}{\cos\theta}+10-10\tan\theta.$$

(第17题)

又易知 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$,故 y 用 θ 表示的函数为

$$y=\frac{20}{\cos\theta}-10\tan\theta+10\ (0\le\theta\le\frac{\pi}{4}).$$

(ii) 由题设可知,在 $\mathrm{Rt}\triangle AQO$ 中,$AO=\sqrt{AQ^2+OQ^2}=\sqrt{10^2+(10-x)^2}$,则

$$y=AO+BO+PO=x+2\sqrt{10^2+(10-x)^2}.$$

显然 $0\le x\le 10$,所以,y 用 x 表示的函数为

$$y=x+2\sqrt{x^2-20x+200}\ (0\le x\le 10).$$

(2) 选用(1)中的函数关系 $y=\frac{20}{\cos\theta}-10\tan\theta+10\ (0\le\theta\le\frac{\pi}{4})$,来确定符合要求的污水处理厂的位置.

因为 $y=\frac{20}{\cos\theta}-10\tan\theta+10=\frac{20}{\cos\theta}-10\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+10$,

19

所以 $y'=\frac{20\sin\theta}{\cos^2\theta}-10\cdot\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=10\cdot\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$.

由 $y'=0$ 得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$. 因 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$,故 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

当 $\theta\in[0,\frac{\pi}{6})$ 时,$y'<0$;当 $\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 时,$y'>0$,所以函数 y 在 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时取得极小值,这个极小值就是函数 y 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的最小值.

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时,$AO=BO=\frac{10}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$ (km).

因此,当污水处理厂建在矩形区域内且到 A,B 两点的距离均为 $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ km 时,铺设的排污管道的总长度最短.

18. 本小题主要考查含有参变量的二次函数、圆的方程以及曲线过定点等有关知识,考查运算求解能力和探究问题的能力. 满分 16 分.

解:(1) 显然 $b\ne 0$. 否则,二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$ 的图象与两个坐标轴只有两个交点 $(0,0)$,$(-2,0)$,这与题设不符.

由 $b\ne 0$ 知,二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$ 的图象与 y 轴有一个非原点的交点 $(0,b)$,故它与 x 轴必有两个交点,从而方程 $x^2+2x+b=0$ 有两个不相等的实数根,因此方程的判别式 $4-4b>0$,即 $b<1$.

所以,b 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

(2) 由方程 $x^2+2x+b=0$,得 $x=-1\pm\sqrt{1-b}$. 于是,二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$ 的图象与坐标轴的交点是 $(-1-\sqrt{1-b},0)$,$(-1+\sqrt{1-b},0)$,$(0,b)$.

设圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 因圆 C 过上述三点,将它们的坐标分别代入圆 C 的方程,得

$$\begin{cases}(-1-\sqrt{1-b})^2+D(-1-\sqrt{1-b})+F=0,\\(-1+\sqrt{1-b})^2+D(-1+\sqrt{1-b})+F=0,\\b^2+Eb+F=0.\end{cases}$$

解上述方程组,因 $b\ne 0$,得 $\begin{cases}D=2,\\E=-(b+1),\\F=b.\end{cases}$

所以,圆 C 的方程为 $x^2+y^2+2x-(b+1)y+b=0$.

(3) 圆 C 过定点. 证明如下:

假设圆 C 过定点 (x_0,y_0)(x_0,y_0 不依赖于 b),将该点的坐标代入圆 C 的方程,并变形为 $x_0^2+y_0^2+2x_0-y_0+b(1-y_0)=0$. (*)

为使(*)式对所有满足 $b<1\ (b\ne 0)$ 的 b 都成立,必须有 $1-y_0=0$,结合(*)式得 $x_0^2+y_0^2+2x_0-y_0=0$.

解得 $\begin{cases}x_0=0,\\y_0=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-2,\\y_0=1.\end{cases}$

经检验知,点 $(0,1)$,$(-2,1)$ 均在圆 C 上.

因此,圆 C 过定点.

19. 本小题主要考查等差数列、等比数列的有关知识,考查运用分类讨论的思想方法进行探索、分析及论证的能力. 满分 16 分.

解:首先证明一个"基本事实":

一个等差数列中,若有连续三项成等比数列,则这个数列的公差 $d_0=0$.

事实上,设这个数列中的连续三项 $a-d_0$,a,$a+d_0$ 成等比数列,则

$$a^2=(a-d_0)(a+d_0).$$

由此得 $d_0=0$.

20

(1) (i) 当 $n=4$ 时,由于数列的公差 $d\ne 0$,故由"基本事实"推知,删去的项只可能为 a_2 或 a_3.

① 若删去 a_2,则由 a_1,a_3,a_4 成等比数列,得 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+3d)$.

因 $d\ne 0$,故由上式得 $a_1=-4d$,即 $\frac{a_1}{d}=-4$. 此时数列为 $-4d$,$-3d$,$-2d$,$-d$,满足题设.

② 若删去 a_3,则由 a_1,a_2,a_4 成等比数列,得 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)$.

因 $d\ne 0$,故由上式得 $a_1=d$,即 $\frac{a_1}{d}=1$. 此时数列为 d,$2d$,$3d$,$4d$,满足题设.

综上可知,$\frac{a_1}{d}$ 的值为 -4 或 1.

(ii) 若 $n\ge 6$,则从满足题设的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中删去一项后得到的数列,必有原数列中的连续三项,从而这三项既成等差数列又成等比数列,故由"基本事实"知,数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公差必为 0,这与题设矛盾. 所以满足题设的数列的项数 $n\le 5$. 又因题设 $n\ge 4$,故 $n=4$ 或 5.

当 $n=4$ 时,由(i)中的讨论知存在满足题设的数列.

当 $n=5$ 时,若存在满足题设的数列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,则由"基本事实"知,删去的项只能是 a_3,从而 a_1,a_2,a_4,a_5 成等比数列,故

$$(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d),$$

及

$$(a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+4d).$$

分别化简上述两个等式,得 $a_1d=d^2$ 及 $a_1d=-5d^2$,故 $d=0$,矛盾. 因此,不存在满足题设的项数为 5 的等差数列.

综上可知,n 只能为 4.

(2) 假设对于某个正整数 n,存在一个公差为 d' 的 n 项等差数列 $b_1,b_1+d',\cdots,b_1+(n-1)d'$ ($b_1d'\ne 0$),其中三项 b_1+m_1d',b_1+m_2d',b_1+m_3d' 成等比数列,这里 $0\le m_1<m_2<m_3\le n-1$. 则有

$$(b_1+m_2d')^2=(b_1+m_1d')(b_1+m_3d').$$

化简得

$$(m_1+m_3-2m_2)b_1d'=(m_2^2-m_1m_3)d'^2. \qquad (*)$$

由 $b_1d'\ne 0$ 知,$m_1+m_3-2m_2$ 与 $m_2^2-m_1m_3$ 或同时为零,或均不为零.

若 $m_1+m_3-2m_2=0$,且 $m_2^2-m_1m_3=0$,则有 $(\frac{m_1+m_3}{2})^2-m_1m_3=0$,

即 $(m_1-m_3)^2=0$,得 $m_1=m_3$,从而 $m_1=m_2=m_3$,矛盾.

因此,$m_1+m_3-2m_2$ 与 $m_2^2-m_1m_3$ 都不为零,故由(*)得

$$\frac{b_1}{d'}=\frac{m_2^2-m_1m_3}{m_1+m_3-2m_2}.$$

因为 m_1,m_2,m_3 均为非负整数,所以上式右边为有理数,从而 $\frac{b_1}{d'}$ 是一个有理数.

于是,对于任意的正整数 $n\ge 4$,只要取 $\frac{b_1}{d'}$ 为无理数,则相应的数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 就是满足要求的数列. 例如,取 $b_1=1$,$d'=\sqrt{2}$,那么,n 项数列 $1,1+\sqrt{2},1+2\sqrt{2},\cdots,1+(n-1)\sqrt{2}$ 满足要求.

20. 本小题主要考查函数的概念、性质、图象以及解题之间的关系等基础知识,考查灵活运用数形结合、分类讨论的思想方法进行探索、分析与解决问题的综合能力. 满分 16 分.

解:(1) 由 $f(x)$ 的定义可知,$f(x)=f_1(x)$(对所有实数 x)

等价于 $f_1(x)\le f_2(x)$(对所有实数 x),

这又等价于 $3^{|x-p_1|}\le 2\cdot 3^{|x-p_2|}$,即

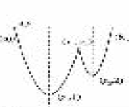
$3^{|x-p_1|-|x-p_2|}\le 2$ 对所有实数 x 均成立. (*)

21

易知函数 $|x-p_1|-|x-p_2|\ (x\in\mathbf{R})$ 的最大值为 $|p_2-p_1|$,故(*)等价于 $3^{|p_2-p_1|}\le 2$,即 $|p_1-p_2|\le\log_3 2$,这就是所求的充分必要条件.

(2) 分两种情形讨论.

(i) 当 $|p_1-p_2|\le\log_3 2$ 时,由(1)知 $f(x)=f_1(x)$(对所有实数 $x\in[a,b]$),则由 $f(a)=f(b)$ 及 $a<p_1<b$ 易知 $p_1=\frac{a+b}{2}$. 再由 $f_1(x)=\begin{cases}3^{p_1-x}, & x<p_1,\\3^{x-p_1}, & x\ge p_1\end{cases}$ 的单调性可知,


(示意图1)

$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度为 $b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}$.(参见示意图1.)

(ii) 当 $|p_1-p_2|>\log_3 2$ 时,不妨设 $p_1<p_2$,则 $p_2-p_1>\log_3 2$. 于是

当 $x\le p_1$ 时,有 $f_1(x)=3^{p_1-x}<3^{p_2-x}<f_2(x)$,从而 $f(x)=f_1(x)$.

当 $x\ge p_2$ 时,$f_1(x)=3^{x-p_1}=3^{p_2-p_1}\cdot 3^{x-p_2}>3^{\log_3 2}\cdot 3^{x-p_2}=f_2(x)$,从而 $f(x)=f_2(x)$.

当 $p_1<x<p_2$ 时,$f_1(x)=3^{x-p_1}$ 及 $f_2(x)=2\cdot 3^{p_2-x}$,由方程 $3^{x_0-p_1}=2\cdot 3^{p_2-x_0}$,解得 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 图象交点的横坐标为

(示意图2)

$$x_0=\frac{p_1+p_2}{2}+\frac{1}{2}\log_3 2. \qquad ①$$

显然 $p_1<x_0=p_2-\frac{1}{2}[(p_2-p_1)-\log_3 2]<p_2$,这表明 x_0 在 p_1 与 p_2 之间. 由①易知

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & p_1\le x\le x_0,\\ f_2(x), & x_0<x\le p_2.\end{cases}$$

综上可知,在区间 $[a,b]$ 上,

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & a\le x\le x_0,\\ f_2(x), & x_0<x\le b.\end{cases}$$(参见示意图2.)

故由函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的单调性可知,$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度之和为 $(x_0-p_1)+(b-p_2)$,由于 $f(a)=f(b)$,即 $3^{p_1-a}=2\cdot 3^{b-p_2}$,得

$$p_1+p_2=a+b-\log_3 2. \qquad ②$$

故由①、②得 $(x_0-p_1)+(b-p_2)=b-\frac{1}{2}[p_1+p_2-\log_3 2]=\frac{b-a}{2}$.

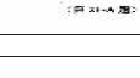
综合(i)、(ii)可知,$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度之和为 $\frac{b-a}{2}$.

数学附加题

21. [选做题] 在 A、B、C、D 四小题中只能选做 2 题,每小题 10 分,共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答,解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. 选修 4－1:几何证明选讲

如图,设 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 AE 与 BC 的延长线交于点 E,$\angle BAC$ 的平分线与 BC 交于点 D. 求证:$ED^2=EC\cdot EB$.


(第21-A题)

B. 选修 4－2:矩阵与变换

在平面直角坐标系 xOy 中,设椭圆 $4x^2+y^2=1$ 在矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 对应的变换下得到曲线 F,求 F 的方程.

22

C. 选修 4－4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,设 $P(x,y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上的一个动点,求 $S=x+y$ 的最大值.

D. 选修 4－5:不等式选讲

设 a,b,c 为正实数,求证:$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+abc\ge 2\sqrt{3}$.

[必做题] 第 22 题、第 23 题,每题 10 分,共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答,解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22. 如图,设动点 P 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上,记 $\frac{D_1P}{D_1B}=\lambda$. 当 $\angle APC$ 为钝角时,求 λ 的取值范围.

(第22题)

23. 请先阅读:在等式

$$\cos 2x=2\cos^2x-1\ (x\in\mathbf{R})$$

的两边对 x 求导

$$(\cos 2x)'=(2\cos^2x-1)'$$

由求导法则得

$$(-\sin 2x)\cdot 2=4\cos x\cdot(-\sin x),$$

化简后得等式

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

(1) 利用上述想法(或者其他方法),试由等式

$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$ ($x\in\mathbf{R}$,正整数 $n\ge 2$)

证明:$n[(1+x)^{n-1}-1]=\sum_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$.

(2) 对于正整数 $n\ge 3$,求证:

(i) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k=0$; (ii) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2C_n^k=0$; (iii) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

数学附加题参考答案

21. [选做题]

A. 选修 4－1:几何证明选讲

本题主要考查三角形、圆的有关知识,考查推理论证能力. 满分 10 分.

证明:如图,因为 AE 是圆的切线,

所以,$\angle ABC=\angle CAE$,

又因为 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,

所以 $\angle BAD=\angle CAD$,

从而 $\angle ABC+\angle BAD=\angle CAE+\angle CAD$.

因为 $\angle ADE=\angle ABC+\angle BAD$,

$\angle DAE=\angle CAE+\angle CAD$,

所以 $\angle ADE=\angle DAE$,故 $EA=ED$.

(第21-A题)

因为 EA 是圆的切线,所以由切割线定理知,

$EA^2=EC\cdot EB$.

而 $EA=ED$,所以 $ED^2=EC\cdot EB$.

B. 选修 4－2:矩阵与变换

本题主要考查曲线在矩阵变换下的变化特点,考查运算求解能力. 满分 10 分.

解:设 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆上任意一点,点 $P(x_0,y_0)$ 在矩阵 A 对应的变换下变为点 $P'(x_0',y_0')$,则有

$\begin{bmatrix}x_0'\\y_0'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$,即 $\begin{cases}x_0'=2x_0,\\y_0'=y_0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_0=\frac{x_0'}{2},\\y_0=y_0'.\end{cases}$

23

又因为点 P 在椭圆上,故 $4x_0^2+y_0^2=1$,从而 $(x_0')^2+(y_0')^2=1$.

所以,曲线 F 的方程为 $x^2+y^2=1$.

C. 选修 4－4:坐标系与参数方程

本题主要考查曲线的参数方程的基本知识,考查运用参数方程解决数学问题的能力. 满分 10 分.

解:因椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\varphi,\\y=\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$ 为参数),

故可设动点 P 的坐标为 $(\sqrt{3}\cos\varphi,\sin\varphi)$,其中 $0\le\varphi<2\pi$.

因此,$S=x+y=\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi=2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi)=2\sin(\varphi+\frac{\pi}{3})$.

所以,当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 时,S 取得最大值 2.

D. 选修 4－5:不等式选讲

本题主要考查平均不等式的相关知识,考查运用不等式进行推理论证的能力. 满分 10 分.

证明:因为 a,b,c 为正实数,由平均不等式可得 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^3}\cdot\frac{1}{c^3}}$,

即 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge\frac{3}{abc}$.

所以 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+abc\ge\frac{3}{abc}+abc$.

而 $\frac{3}{abc}+abc\ge 2\sqrt{\frac{3}{abc}\cdot abc}=2\sqrt{3}$,

所以 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+abc\ge 2\sqrt{3}$.

22. [必做题] 本题主要考查空间向量的基本知识和基本运算,考查运用空间向量解决问题的能力. 满分 10 分.

解:由题设可知,以 $\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DD_1}$ 为单位正交基底,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,则有 $A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$C(0,1,0)$,$D_1(0,0,1)$.

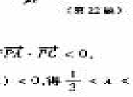
由 $\overrightarrow{D_1B}=(1,1,-1)$ 得 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}=(\lambda,\lambda,-\lambda)$,所以

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD_1}+\overrightarrow{D_1A}=(-\lambda,-\lambda,\lambda)+(1,0,-1)$

$=(1-\lambda,-\lambda,\lambda-1)$,

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD_1}+\overrightarrow{D_1C}=(-\lambda,-\lambda,\lambda)+(0,1,-1)$

$=(-\lambda,1-\lambda,\lambda-1)$.


(第22题)

显然 $\angle APC$ 不是平角,所以 $\angle APC$ 为钝角等价于

$\cos\angle APC=\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}\rangle=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PC}|}<0$,这等价于 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}<0$,

即 $(1-\lambda)(-\lambda)+(-\lambda)(1-\lambda)+(\lambda-1)^2=(\lambda-1)(3\lambda-1)<0$,得 $\frac{1}{3}<\lambda<1$.

因此,λ 的取值范围为 $(\frac{1}{3},1)$.

23. [必做题] 本题主要考查组合数、二项式定理、导数、积分等基础知识,考查推理论证能力与分析问题、解决问题的能力. 满分 10 分.

证明:(1) 在等式 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$ 两边对 x 求导得

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+\cdots+(n-1)C_n^{n-1}x^{n-2}+nC_n^nx^{n-1}.$$

移项得 $n[(1+x)^{n-1}-1]=\sum_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$. (*)

24

(下转 A28 版)